Agzamxodjaeva M.Sh

Mavzu: Modulli tenglamalar

MODULLI TENGLAMA

TIIAME

1) **$|f(x)| = g(x)$ ko'rinishdagi tenglama.** Modulning ta'rifiga ko'ra o'rinli bo'lgan

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{agar } f(x) \geq 0 \text{ bo'lsa,} \\ -f(x), & \text{agar } f(x) < 0 \text{ bo'lsa} \end{cases} \qquad (1)$$

munosabatdan ko'rinadiki, $|f(x)| = g(x)$ tenglamaning barcha yechimlarini topish uchun $f(x) = g(x)$ tenglamaning $f(x) \geq 0$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha yechimlarini va $-f(x) = g(x)$ tenglamaning $f(x) < 0$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha yechimlarini topish yetarli, ya'ni
$|f(x)| = g(x)$ tenglama

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \quad (2) \qquad \text{va} \qquad \begin{cases} -f(x) = g(x), \\ f(x) < 0 \end{cases} \quad (3)$$

sistemalar majmuasiga teng kuchli.

1- m i s o l. $|3x-2|=x$ tenglamani yechamiz.

Y e c h i s h. Bu tenglama uchun (2) va (3) sistemalar mos ravishda quyidagicha bo'ladi:

$$\begin{cases} 3x-2=x, \\ 3x-2\geq 0 \end{cases} \quad \text{yoki} \quad \begin{cases} -(3x-2)=x, \\ 3x-2<0. \end{cases}$$

Bu sistemalarni yechib, berilgan tenglamaning barcha yechimlarini olamiz: $x_1=\frac{1}{2}; x_2=1$.

2) $|f(x)|=|g(x)|$ ko'rinishdagi tenglama.

$a,b\in R$ sonlarini qaraymiz. Agar $a=b$ bo'lsa, $|a|=|b|$ bo'lishi ravshan. Agar $a=-b$ bo'lsa, $|a|=|-b|=|b|$ bo'ladi. Demak, $a=b$ yoki $a=-b$ bo'lsa, $|a|=|b|$ bo'ladi.

Endi $|a|=|b|$ bo'lsin. $b\geq 0$, $b<0$ hollar bo'lishi mumkin. Agar $b\geq 0$ bo'lsa, $|a|=b$ tenglikka, bundan esa $a=b$ yoki $a=-b$ tenglikka ega bo'lamiz; $b<0$ bo'lsa, $|b|=-b$ bo'lib, $|a|=-b$ tenglikka, bundan esa $a=-b$ yoki $a=b$ tenglikka ega bo'lamiz. Demak, $|a|=|b|$ bo'lsa, $a=b$ yoki $a=-b$ bo'ladi.

Yuqoridagi mulohazalardan ko'rinadiki, $|a|=|b|$ tenglik $a=b$ yoki $a=-b$ bo'lgan hollarda o'rinli bo'ladi, qolgan hollarda esa o'rinli bo'lmaydi. Bundan foydlanib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$|f(x)|=|g(x)|$ tenglama $\left[\begin{array}{l} f(x)=g(x), \\ f(x)=-g(x) \end{array}\right.$ majmuasiga teng kuchli

7- misol. $|3x-4|=|x|$ tenglamani yechamiz.

Yechish. $\left[\begin{array}{l} 3x-4=x, \\ 3x-4=-x \end{array}\right.$ majmuani tuzib, uni yechamiz.

Birinchi tenglama $x=2$, ikkinchi tenglama $x=1$ yechimga ega. Demak, 1 va 2 sonlarigina berilgan tenglamaning yechimi bo'ladi.

$|x|^{2n}=|x^{2n}|=x^{2n}$ tenglik ixtiyoriy $n\in R$ sonlari uchun o'rinli

bo'lgani sababli, $|f(x)|=|g(x)|$ ko'rinishdagi ayrim tenglamalarni juft darajaga ko'tarish usulida yechish ham mumkin.

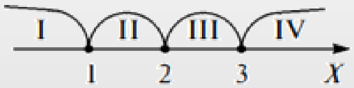
8- misol. $|2x-3|=|x+1|$ tenglamani yechamiz.

Yechish. Tenglamaning ikkala tomonini kvadratga ko'tarsak, $(2x-3)^2=(x+1)^2$ yoki $4x^2-12x+9=x^2+2x+1$ tenglama hosil bo'ladi.

Bundan, $x_1=4$, $x_2=\frac{2}{3}$ yechimlarni topamiz;

3) $|f(x)+g(x)|=|f(x)|+|g(x)|$ **ko‘rinishdagi tenglama.** $|a+b|\le|a|+|b|$ tengsizlikda (a, $b\in R$) tenglik belgisi $ab\ge 0$ bo‘lgandagina o‘rinli bo‘lishini nazarda tutsak, $|f(x)+g(x)|=$ $=|f(x)|+|g(x)|$ **tenglama** $f(x)\cdot g(x)\ge 0$ **tengsizlikka teng kuchli ekanini ko‘ramiz.**

10- m i s o l. $|x-1|-2|x-2|+3|x-3|=4$ tenglamani «oraliqlar usuli»da yechamiz.



21- rasm.

Y e c h i s h. $x-1=0$, $x-2=0$, $x-3=0$ tenglamalarni yechib, $x=1$, $x=2$, $x=3$ sonlarini hosil qilamiz. Bu sonlar sonlar o'qini to'rtta (I, II, III, IV) oraliqqa ajratadi (21- rasm). Berilgan tenglamani shu oraliqlarning har birida yechamiz.

$x<1$ bo'lsa, $|x-1|=1-x$, $|x-2|=2-x$, $|x-3|=3-x$ bo'lgani uchun berilgan tenglama $(1-x)-2(2-x)+3(3-x)=4$ ko'rinishni oladi. Bu tenglama $x<1$ shartni qanoatlantiruvchi yechimga ega emas. Demak, berilgan tenglama $(-\infty; 1)$ oraliqda yechimga ega emas.

$1 \le x < 2$ bo'lsa, $|x-1|=x-1$, $|x-2|=2-x$, $|x-3|=$ $=3-x$ bo'lgani sababli, berilgan tenglama $(x-1)-2(2-$ $-x)+3(3-x)=4$ ko'rinishni oladi. Bu tenglama soddalashtirilsa, $0 \cdot x=0$ tenglama hosil bo'ladi. $0 \cdot x=0$ tenglamaning $1 \le x < 2$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha yechimlari to'plamini tuzamiz: $[1; 2)$.

$2 \le x < 3$ bo'lsa, tenglama $x=2$ yechimga, $x \ge 3$ bo'lganda esa tenglama $x=5$ dan iborat yagona yechimga ega ekanligini yuqoridagidek aniqlash mumkin.

Qaralgan to'rtta oraliqlardagi yechimlar to'plamini tuzamiz: $\varnothing \cup [1; 2) \cup \{2\} \cup \{5\} = [1; 2] \cup \{5\}$. Shunday qilib, $[1; 2] \cup \{5\}$